Über das Maximum der Summen orthogonaler Funktionen

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

1. Im folgenden betrachten wir orthonormierte Systeme $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ im Grundintervall (0, 1). Für eine reelle Zahlenfolge $\{a_n\}_1^\infty$ setzen wir

$$\|\{a_n\};\infty\| = \sup\left\{\int_0^1 \Big(\sup_{1\leqq i\leqq j} |a_i\varphi_i(x)+\cdots+a_j\varphi_j(x)|\Big)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}}$$

und

$$\|\{a_n\};K\| = \sup_{|\varphi_n|\leqq K}\left\{\int_0^1 \Big(\sup_{1\leqq i\leqq j} |a_i\varphi_i(x)+\cdots+a_j\varphi_j(x)|\Big)^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

wobei das Supremum über alle orthonormierten Systeme $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$, bzw. über alle orthonormierten Systeme mit

$$(1) \qquad |\varphi_n(x)|\leqq K \qquad (0\leqq x\leqq 1;\ n=1,2,\ldots)$$

zu bilden ist ($K\geqq 1$). Offensichtlich ist $\|\{a_n\};K\|\leqq\|\{a_n\};\infty\|$ ($K\geqq 1$). Es ist eine Frage, ob auch eine Ungleichung

$$\|\{a_n\};\infty\| \leqq C(K)\|\{a_n\};K\| \qquad (K>1)$$

gilt, mit einer nur von K abhängigen Konstanten $C(K)$. (Im folgenden bezeichnen $C_1(K), C_2(K), \ldots$ gewisse nur von K abhängige positive Konstanten, $C_1, C_2, \ldots$ sind aber positive absolute Konstanten.) Dieses Problem ist noch ungelöst; nur sind gewisse Teilresultate bekannt. Der Wert $\|\{a_n\};K\|$, bzw. $\|\{a_n\};\infty\|$ hängt nähmlich von der Anordnung der Folge $\{a_n\}$ ab, und für gewisse Anordnungen ist eine solche Ungleichung gültig. In einer vorigen Arbeit [2] haben wir bewiesen, daß

$$\sup_P \|\{a_n\};\infty\| \leqq C_1(K)\sup_P \|\{a_n\};K\| \qquad (K>1),$$

wobei $\sup_P$ das Supremum für jede Anordnung der Folge $\{a_n\}$ bedeutet. In dieser Note werden wir Folgendes beweisen:

Satz. *Für jede Folge* $\{a_n\}_1^\infty$ *gilt*

$$\inf_P \|\{a_n\};\infty\| \leqq C_2(K) \inf_P \|\{a_n\};K\| \qquad (K>1),$$

wobei $\inf\limits_P$ *bedeutet, daß das Infimum für jede Anordnung der Folge* $\{a_n\}$ *gebildet wird.*

2. Unsere Behauptung folgt aus dem folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz I. *Für jede Folge* $\{a_n\}_1^\infty$ *von* 0 *verschiedenen Zahlen und für jedes* N *gilt*

$$\sum_{n=1}^{\nu(N)} a_n^2 \log_+^2 \frac{a_1^2+\cdots+a_{\nu(N)}^2}{a_n^2} \leqq C_3(K)\|\{a_n\}_1^{\nu(N)};K\|^2 \qquad (K>1), \tag{2}$$

wobei $\{a_n\}_1^{\nu(N)}$ *die Folge* $\{a_1,\ldots,a_{\nu(N)},0,\ldots\}$ *bezeichnet,* $\nu(N)=1+32+\cdots+32^N$ *ist, weiterhin die Funktion* $\log_+ x$ *folgenderweise definiert wird:*

$$\log_+ x = \begin{cases} \log x, & x \geqq 2, \\ 1 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

(Man bezeichnet mit log den Logarithmus mit der Basis 2.)

Wegen der offensichtlich gültigen Ungleichung

$$\left(\sum_{n=1}^\infty a_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \|\{a_n\};K\|$$

können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\{a_n\}\in l^2$ annehmen. Da der Wert $\|\{a_n\};\infty\|$, bzw. $\|\{a_n\};K\|$ nur von den Koeffizienten $a_n\neq 0$ abhängt, können wir $a_n\neq 0$ $(n=1,2,\ldots)$ voraussetzen. Dann folgt aus (2) offensichtlich

$$\sum_{n=1}^\infty a_n^2 \log_+^2 \frac{a_1^2+\cdots+a_m^2+\cdots}{a_n^2} \leqq C_3(K)\|\{a_n\}_1^\infty;K\| \qquad (K>1),$$

und hieraus:

$$\sum_{n=1}^\infty a_n^2 \log_+^2 \frac{a_1^2+\cdots+a_m^2+\cdots}{a_n^2} \leqq C_3(K)\inf_P\|\{a_n\}_1^\infty;K\| \qquad (K>1). \tag{3}$$

(Eine ähnliche Abschätzung haben wir für $\|\{a_n\};\infty\|$ schon in der Arbeit [3] bewiesen.)

Es sei $\{a_{n_k}\}$ eine Anordnung von $\{a_n\}$, für die $|a_{n_1}|\geqq\cdots\geqq|a_{n_k}|\geqq\cdots$ besteht. Dann ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty a_n^2 \log_+^2 \frac{a_1^2+\cdots+a_m^2+\cdots}{a_n^2} &= \sum_{k=1}^\infty a_{n_k}^2 \log_+^2 \frac{a_{n_1}^2+\cdots+a_{n_l}^2+\cdots}{a_{n_k}^2} \geqq \\ &\geqq C_1\left(a_{n_1}^2+\sum_{k=2}^\infty a_{n_k}^2\log^2 k\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Weiterhin, in der Arbeit [4] haben wir bewiesen, daß

$$\|\{\gamma_n\};\infty\| \leqq C_2\left(\gamma_1^2+\sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n^2\log^2 n\right)^{\frac{1}{2}}$$

für jede Folge $\{\gamma_n\}$ besteht. So ist

(5)
$$\inf_P \|\{a_n\};\infty\| \leqq \|\{a_{n_k}\};\infty\| \leqq C_2\left(a_{n_1}^2+\sum_{k=2}^{\infty}a_{n_k}^2\log^2 k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aus (3), (4) und (5) erhalten wir die Behauptung unseres Satzes.

3. Es soll nun der Hilfssatz I bewiesen werden, Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $a_n>0$ $(n=1,2,\ldots,\nu(N))$ annehmen. $\{a_{n_k}\}$ $(k=1,\ldots,\nu(N))$ bezeichne eine Anordnung der Folge $\{a_n\}_1^{\nu(N)}$, für die $a_{n_1}\geqq\cdots\geqq a_{n_{\nu(N)}}$ besteht. Es sei Z_k $(k=1,\ldots,N)$ die Menge der Indizes n_l mit $\nu(k-1)<l\leqq\nu(k)$, und $Z_0=\{n_1\}$. Die Elemente von Z_k bezeichnen wir in natürlicher Anordnung mit $m_1(k),\ldots,m_{32^k}(k)$ $(m_1(k)<\cdots<m_{32^k}(k))$. Wir setzen

$$b_n=\min_{m\in Z_k}a_m \qquad (n\in Z_k;\ k=0,\ldots,N).$$

Dann ist $\{b_n\}_1^{\nu(N)}$ eine Folge von positiven Zahlen mit $b_n\leqq a_n$ $(n=1,\ldots,\nu(N))$. Es sei weiterhin

$$\beta_n=\min_{m\in Z_{k-1}}a_m \quad (n\in Z_k;\ k=1,\ldots,N), \quad \beta_{n_1}=a_{n_1}.$$

Dann ist $a_n\leqq\beta_n$ $(n=1,\ldots,\nu(N))$.

Nach dem Hilfssatz I der Arbeit [3] gilt also

(6)
$$\sum_{n=1}^{\nu(N)}a_n^2\log_+^2\frac{a_1^2+\cdots+a_{\nu(N)}^2}{a_n^2}\leqq C_3\sum_{n=1}^{\nu(N)}\beta_n^2\log_+^2\frac{\beta_1^2+\cdots+\beta_{\nu(N)}^2}{\beta_n^2}.$$

Da

$$\sum_{n\in Z_k}\beta_n^2=32\sum_{n\in Z_{k-1}}b_n^2 \qquad (k=1,\ldots,N)$$

ist, erhalten wir durch eine einfache Rechnung

$$\sum_{n=1}^{\nu(N)}\beta_n^2\log_+^2\frac{\beta_1^2+\cdots+\beta_{\nu(N)}^2}{\beta_n^2}=\sum_{k=0}^{N}\sum_{n\in Z_k}\beta_n^2\log_+^2\frac{\beta_1^2+\cdots+\beta_{\nu(N)}^2}{\beta_n^2}\leqq$$

(7)
$$\leqq b_{n_1}^2\log_+^2\frac{b_{n_1}^2+32\sum\limits_{k=0}^{N-1}\Big(\sum\limits_{n\in Z_k}b_n^2\Big)}{b_{n_1}^2}+32\sum_{k=1}^{N-1}\left(\sum_{n\in Z_k}b_n^2\log_+^2\frac{b_{n_1}^2+32\sum\limits_{k=0}^{N-1}\Big(\sum\limits_{n\in Z_k}b_n^2\Big)}{b_n^2}\right)\leqq$$

$$\leqq C_4\sum_{n=1}^{\nu(N)}b_n^2\log_+^2\frac{b_1^2+\cdots+b_{\nu(N)}^2}{b_n^2}.$$

Aus (6) und (7) folgt

(8)
$$\sum_{n=1}^{\nu(N)}a_n^2\log_+^2\frac{a_1^2+\cdots+a_{\nu(N)}^2}{a_n^2}\leqq C_5\sum_{n=1}^{\nu(N)}b_n^2\log_+^2\frac{b_1^2+\cdots+b_{\nu(N)}^2}{b_n^2}.$$

Nach dem Hilfssatz II der Arbeit [5] gilt

$$\|\{c_n\}; K\| \leqq C_4(K) \|\{d_n\}; K\| \quad (|c_n| \leqq |d_n|;\ n=1, 2, \ldots;\ K>1),$$

und so ist

$$\|\{b_n\}_1^{\nu(N)}; K\| \leqq C_4(K) \|\{a_n\}_1^{\nu(N)}; K\| \qquad (K>1). \tag{9}$$

Wir werden nun die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{\nu(N)} b_n^2 \log_+^2 \frac{b_1^2+\cdots+b_{\nu(N)}^2}{b_n^2} \leqq C_5(K) \|\{b_n\}_1^{\nu(N)}; K\| \qquad (K>1) \tag{10}$$

beweisen. Aus (8), (9) und (10) erhalten wir die Behauptung des Hilfssatzes I.

4. Zum Beweis von (10) können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\sum_{n=1}^{\nu(N)} b_n^2 = 1 \tag{11}$$

annehmen.

Wir werden erstens den folgenden bekannten, in wesentlichen von MENCHOFF [1] stammenden Hilfssatz (siehe [5], Hilfssatz VI) anwenden.

Hilfssatz II. *Es sei $K>1$, $p(\geqq 2)$ eine natürliche Zahl und $1 \leqq c \leqq p/4$. Dann gibt es ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $h_l(c, p; x)$ $(l=1, \ldots, p^2)$ mit folgenden Eigenschaften: es gilt $|h_l(c, p; x)| \leqq K$ $(0 \leqq x \leqq 1;\ l=1, \ldots, p^2)$; es gibt ein Intervall $E(\subseteqq(0, 1))$ mit $\operatorname{mes}(E) \geqq C_6(K)c^{-1}$ derart, daß für $x \in E$ ein Index $m(x)(<p^2)$ mit $h_l(c, p; x) \geqq 0$ $(l=1, \ldots, m(x))$ und*

$$\sum_{l=1}^{m(x)} h_l(c, p; x) \geqq C_7(K)\sqrt{c}\, p \log p$$

existiert.

Es sei $I_0=(-1, 0)$, $I_k=\left(\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right)$ $(k=1, \ldots, N)$ und $J=\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Wir werden ein in $(-1, 2)$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $(n=1, \ldots, \nu(N))$ mit folgenden Eigenschaften definieren:

a) es gilt $|\psi_n(x)| \leqq K$ $\left(0 \leqq x \leqq 1;\ n \in \bigcup_{l=1}^{k} Z_l\right)$,

b) im Falle $x \in I_{l_0} (0 \leqq l_0 \leqq k)$ ist $\psi_n(x)=0$ $\left(n \in \bigcup_{l=0}^{k} Z_l \setminus Z_{l_0}\right)$

c) weiterhin besteht $\psi_{n_1}(x)=1$ $(x \in (-1, 0))$, und für jedes $l(1 \leqq l \leqq k)$ gibt es eine meßbare Menge $E_l(\subseteqq I)$ mit

$$\operatorname{mes}(E_l) \geqq C_6(K) \frac{1}{2^{l+1}}$$

derart, daß für $x \in E_l$ mit geeignetem Indizes $\nu(x)$ $(1 \leqq \nu(x) \leqq 32^l)$

$$\sum_{i=1}^{\nu(x)} b_{m_i(l)} \psi_{m_i(l)}(x) \geqq \sqrt{2}\, C_7(K)\, l \sqrt{2^l \sum_{i=1}^{32^l} b_{m_i(l)}^2}$$

besteht $(k=1, \dots, N)$.

Wir setzen

$$\psi_{n_1}(x) = \begin{cases} 1 & (x \in (-1, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es sei k_0 $(0 \leqq k_0 < N)$ eine ganze Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ $\left(n \in \bigcup_{l=1}^{k_0} Z_l\right)$ derart definiert sind, daß sie in $(-1, 2)$ ein orthonormiertes System bilden, und a), b), c) für $k = k_0$ erfüllt sind.

Wir wenden den Hilfssatz II im Falle $c=1, p=4^{k_0+1}$ an. Die so erhaltenen Funktionen, bzw. die so erhaltene Menge bezeichnen wir mit $\chi_m(x)$ $(m=1, \dots, 16^{k_0+1})$, bzw. mit E. Es sei $f(x)$ eine in $(0, 1)$ definierte Funktion und H eine Untermenge von $(0, 1)$. Ist $I=(a, b)$ ein endliches Intervall, dann setzen wir

$$f(I; x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x-a}{b-a}\right) & (a < x < b), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

weiterhin bezeichne $H(I)$ diejenige Menge, die aus H durch die Transformation $y = (b-a)x+a$ entsteht.

Wir setzen

$$\tilde{\psi}_n(x) = \chi_i(I_{k_0+1}; x) \quad (n = m_{(i-1)2^{k_0+1}+s}(k_0+1),\ s=1, \dots, 2^{k_0+1};\ i=1, \dots, 16^{k_0+1}).$$

Nach dem obigen gelten offensichtlich

$$\int_{-1}^{1} \tilde{\psi}_n^2(x)\, dx = \frac{1}{2^{k_0+2}} \qquad (n \in Z_{k_0+1}), \tag{12}$$

$$a_{n,m} = \int_{-1}^{1} \tilde{\psi}_n(x) \tilde{\psi}_m(x)\, dx \leqq \frac{1}{2^{k_0+2}} \qquad (n, m \in Z_{k_0+1}), \tag{13}$$

$$\int_{-1}^{1} \tilde{\psi}_n(x) \tilde{\psi}_m(x)\, dx = 0 \qquad (n, m \in Z_{k_0+1}, |n-m| > 2^{k_0+1}). \tag{14}$$

Der folgende Hilfssatz ist bekannt. (S. Menchoff [1].)

Hilfssatz III. *Es seien d und q positive ganze Zahlen, $0 < d < q$. Zu jedem Indexpaar (i, j) mit $1 \leqq i \leqq q$, $1 \leqq j \leqq q$ und $|i-j| = d$ soll eine von Null verschiedene*

Zahl $\alpha_{i,j}$ zugeordnet werden; wir bezeichnen mit B_d das Maximum der absoluten Beträge der Zahlen $\alpha_{i,j}$. In jedem Intervall (u, v) mit

$$v-u > 2B_d$$

können dann Treppenfunktionen $\bar{\varphi}_l(x)$ $(l=1, \dots, q)$ mit folgenden Eigenschaften definiert werden:

$$|\bar{\varphi}_l(x)|=1 \qquad (u<x<v;\ l=1, \dots, q),$$

$$\int_u^v \bar{\varphi}_i(x)\bar{\varphi}_j(x)\,dx = -\alpha_{i,j} \qquad (|i-j| = d,\ 1 \leqq i \leqq q,\ 1 \leqq j \leqq q),$$

$$\int_u^v \bar{\varphi}_i(x)\bar{\varphi}_j(x)\,dx = 0 \qquad (i \neq j,\ |i-j| \neq d,\ 1 \leqq i \leqq q,\ 1 \leqq j \leqq q).$$

Auf Grund von (12), (13) und (14), durch Anwendung dieses Hilfssatzes können wir Treppenfunktionen $\bar{\psi}_{m_i(k_0+1)}(x)$ $(i=1, \dots, 32^{k_0+1})$ mit folgenden Eigenschaften angeben:

$$|\bar{\psi}_{m_i(k_0+1)}(x)| = \begin{cases} 1 & (x\in(1,2)) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (i=1, \dots, 32^{k_0+1}), \tag{15}$$

$$\int_1^2 \bar{\psi}_n(x)\bar{\psi}_m(x)\,dx = -\alpha_{n,m} \qquad (n\neq m;\ n, m\in Z_{k_0+1}). \tag{16}$$

Da die Funktionen $\psi_n(x)$ in $(-1, 2)$ Treppenfunktionen sind, können wir eine Einteilung des Intervalls J auf paarweise disjunkte Intervalle J_r $(r=1, \dots, \varrho)$ derart angeben, daß jede Funktion $\psi_n(x)$ in jedem Intervall J_r $(1 \leqq r \leqq \varrho)$ konstant ist; die zwei Hälften von J_r bezeichnen wir mit J_r', bzw. mit J_r'' $(r=1, \dots, \varrho)$. Dann setzen wir

$$\psi_n(x) = \frac{1}{D}\left(\tilde{\psi}_n(x)+\sum_{r=1}^{\varrho} \bar{\psi}_n(J_r';x)-\sum_{r=1}^{\varrho} \bar{\psi}_n(J_r'';x)\right) \qquad (n\in Z_{k_0+1}), \tag{17}$$

wobei

$$D^2 = \int_{I_{k_0+1}} \tilde{\psi}_n^2(x)\,dx + \int_J \bar{\psi}_n^2(x)\,dx \tag{18}$$

ist.

$\psi_n(x)$ $(n\in Z_{k_0+1})$ sind offensichtlich Treppenfunktionen. Wegen (16), (17) und (18) bilden die Funktionen $\psi_n(x)$ $\left(n\in \bigcup_{l=0}^{k_0+1} Z_l\right)$ ein orthonormiertes System in $(-1, 2)$. Auf Grund von (12) und (15) gilt

$$1 \leqq D^2 \leqq 2, \tag{19}$$

und so besteht

$$|\psi_n(x)| \leqq K \quad \text{für} \quad -1 \leqq x \leqq 2;\ n\in Z_{k_0+1}. \tag{20}$$

Auf Grund der Definition von $\psi_n(x)$ gilt auch

(21) $$\psi_n(x)=0 \quad \text{für} \quad n\in Z_{k_0+1}; \qquad x\in(-1,1),\ x\notin I_{k_0+1}.$$

Auf Grund des Hilfssatzes II, weiterhin der Definition von b_n und $\psi_n(x)$, aus (19) folgt mit $E_{k_0+1}=E(I_{k_0+1})(\subseteqq I_{k_0+1})$

(22) $$\sum_{i=1}^{\nu(x)} b_{m_i(k_0+1)}\psi_{m_i(k_0+1)}(x) \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} C_7(K) \min_{m\in Z_{k_0+1}} a_m 4^{k_0+1}\cdot\log 4^{k_0+1}\cdot 2^{k_0+1} =$$

$$= \sqrt{2}\, C_7(K)\sqrt{2^{k_0+1}\sum_{i=1}^{32^{k_0+1}} b^2_{m_i(k_0+1)}}(k_0+1), \quad \text{für} \quad x\in E_{k_0+1}$$

mit geeigneten Indizes $\nu(x)$ $(1\leqq \nu(x)\leqq 32^{k_0+1})$, und mit

(23) $$\operatorname{mes}(E_{k_0+1}) \geqq C_6(K)\frac{1}{2^{k_0+1}}.$$

Aus (20), (21), (22) und (23) ergibt sich, daß a), b) und c) im Falle $k=k_0+1$ für das in $(-1,2)$ orthonormierte System $\{\psi_n(x)\}$ $\left(n\in\bigcup_{l=0}^{k_0+1} Z_l\right)$ von Treppenfunktionen erfüllt werden. Das Funktionensystem $\{\psi_n(x)\}$ $\left(n\in\bigcup_{l=0}^{N} Z_l\right)$ mit den erwähnten Eigenschaften erhalten wir also durch Induktion.

Aus b) und c) bekommen wir leicht

(24) $$\int_{-1}^{2}\Big(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq \nu(N)}|b_i\psi_i(x)+\cdots+b_j\psi_j(x)|\Big)^2 dx \geqq$$
$$\geqq b^2_{n_1}+C_7^2(K)C_6(K)\sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{n\in Z_k} b_n^2\Big)k^2 \geqq C_8(K)\left\{b^2_{n_1}+\sum_{k=1}^{N}\Big(\sum_{n\in Z_k} b_n^2\Big)k^2\right\}.$$

Aus (11) folgt

(25) $$\frac{1}{b_n^2}\geqq 32^k \qquad (n\in Z_k).$$

Wir bezeichnen mit M die Menge derjenigen Indizes k $(1\leqq k\leqq N)$, für die

$$\frac{1}{b_n^2}\geqq 32^{4k} \qquad (n\in Z_k)$$

besteht, und M' sei die Menge der übrigen Indizes k $(1\leqq k\leqq N)$. Dann setzen wir

(26) $$\sum_{n=1}^{\nu(N)} b_n^2\log_+^2\frac{1}{b^2_{n_1}} = b^2_{n_1}\log_+^2\frac{1}{b_n^2}+\sum_{k\in M}\Big(\sum_{n\in Z_k} b_n^2\log_+^2\frac{1}{b^2_{n_1}}\Big)+\sum_{k\in M'}\Big(\sum_{n\in Z_k} b_n^2\log_+^2\frac{1}{b_n^2}\Big).$$

Da $x \log \frac{1}{x}$ für $0 < x < \frac{1}{2}$ eine monoton wachsende Funktion ist, auf Grund von (25), weiterhin aus der Definition von M und M' erhalten wir

$$\sum_{k\in M}\left(\sum_{n\in Z_k} b_n^2 \log_+^2 \frac{1}{b_n^2}\right)+\sum_{k\in M'}\left(\sum_{n\in Z_k} b_n^2 \log_+^2 \frac{1}{b_n^2}\right)=$$

$$(27)\qquad \begin{aligned} &=\sum_{k\in M}\left(\sum_{n\in Z_k} b_n^2 \log^2 \frac{1}{b_n^2}\right)+\sum_{k\in M'}\left(\sum_{n\in Z_k} b_n^2 \log^2 \frac{1}{b_n^2}\right)\leqq \\ &\leqq C_6\sum_{k\in M}\left(\sum_{n\in Z_k} b_n\right)+20\sum_{k\in M'}\left(\sum_{n\in Z_k} b_n^2\right)k^2\leqq \\ &\leqq C_6\sum_{k\in M}\frac{1}{32^k}+20\sum_{k\in M}\left(\sum_{n\in Z_k} b_n^2\right)k^2\leqq C_7\left(1+\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n\in Z_k} b_n^2\right)k^2\right). \end{aligned}$$

Ist $b_{n_1}^2 \geqq \frac{1}{2}$, dann gilt wegen (11)

$$b_{n_1}^2 \log_+^2 \frac{1}{b_{n_1}^2} \leqq b_{n_1}^2 \leqq 1,$$

ist aber $b_{n_1}^2 < \frac{1}{2}$, dann gilt

$$b_{n_1}^2 \log_+^2 \frac{1}{b_{n_1}^2} \leqq C_8 b_{n_1} < C_8.$$

Also ist

$$(28)\qquad b_{n_1}^2 \log_+^2 \frac{1}{b_{n_1}^2} \leqq C_9.$$

Weiterhin folgt aus (11)

$$(29)\qquad b_{n_1}^2+\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n\in Z_k}' b_n^2\right)k^2 \geqq 1.$$

Aus (26), (27), (28) und (29) erhalten wir

$$(30)\qquad \sum_{n=1}^{\nu(N)} b_n^2 \log_+^2 \frac{1}{b_n^2} \leqq C_{10}\left(b_{n_1}^2+\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n\in Z_k} b_n^2\right)k^2\right).$$

Aus (24) und (30) ergibt sich

$$(31)\qquad \int_{-1}^{2}\left(\max_{1\leqq i\leqq j\leqq \nu(N)} |b_i\psi_i(x)+\cdots+b_j\psi_j(x)|\right)^2 dx \geqq C_9(K)\left(\sum_{n=1}^{\nu(N)} b_n^2 \log_+^2 \frac{1}{b_n^2}\right).$$

Wegen $K>1$ gibt es eine Konstante $C_{10}(K)$ $(0<C_{10}(K)<1)$, für die

$$\frac{C_{10}(K)}{3}+(1-C_{10}(K))K^2 = 1$$

erfüllt ist. Wir setzen

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \psi_n\left(\dfrac{3x}{C_{10}(K)} - 1\right) & (x \in (0, C_{10}(K))), \\ K r_n((C_{10}(K), 1); x) & (x \in (C_{10}(K), 1)), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n=1, \ldots, \nu(N))$, wobei $r_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi x$ die n-te Rademachersche Funktion bezeichnet. Die Funktionen $\varphi_n(x)$ bilden in $(0, 1)$ ein durch K beschränktes orthonormiertes System. Weiterhin folgt aus (31)

$$\int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq \nu(N)} |b_i \varphi_i(x) + \cdots + b_j \varphi_j(x)| \Big)^2 dx \geqq C_{11}(K) \sum_{n=1}^{\nu(N)} b_n^2 \log_+^2 \frac{1}{b_n^2}.$$

Daraus erhalten wir endlich wegen

$$\|\{b_n\}_1^{\nu(N)}; K\|^2 = \sup_{|\varphi_n| \leqq K} \int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq \nu(N)} |b_i \varphi_i(x) + \cdots + b_j \varphi_j(x)| \Big)^2 dx$$

die Behauptung des Hilfssatzes I.

5. Bemerkung. Aus (3), auf Grund eines Satzes der Arbeit [5] folgt die folgende Behauptung.

Es sei $K > 1$. Ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log_+^2 \frac{a_1^2 + \cdots + a_m^2 + \cdots}{a_n^2} = \infty,$$

dann gibt es ein orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$ mit (1), *für welches die Reihe*

$$\Sigma a_n \varphi_n(x)$$

in $(0, 1)$ *fast überall divergiert.*

Für nicht notwendigerweise beschränkte Systeme wurde dies in der Arbeit [3] bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] D. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales bornées dans leur ensemble, *Recueil math. Moscou*, **3** (43) (1938), 103—120.

[2] K. Tandori, Über die unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **32** (1971), 11—40.

[3] K. Tandori, Über die Divergenz der Orthogonalreihen, *Publicationes Math. Debrecen*, **8** (1961), 291—307.

[4] K. Tandori, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. II, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 219—232.

[5] K. Tandori, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. III, *Publ. Math. Debrecen*, **12** (1965), 125—157.

(Eingegangen am 8. Oktober 1970)